

Ad § 7: Homomorphismen zwischen Körpererweiterungen

Prop.: $\forall \varphi \in \text{Hom}_K(L, L') \quad \forall a \in L:$

a algebraisch über $K \iff \varphi(a)$ algebraisch über K

Und dann haben beide dasselbe Minimalpolynom über K .

Beweis: $\forall f \in K[X]: \varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$. Auch ist φ injektiv.

Also gilt $f(a) = 0 \iff f(\varphi(a)) = 0$ qed.

Prop.: $\forall a \in L: \text{Hom}_K(K(a), L') \xrightarrow{1:1} \{a' \in L' \mid m_{a,K}(a') = 0\}$
 $\varphi \mapsto \varphi(a)$

Beweis: Wohldefiniert wegen voriger Prop. und

Injektiv, da jeder Homo durch seine Werte auf $K \cup \{a\}$ bestimmt ist.

Surjektiv: Sei $a' \in \text{RHS}$ und konstruiere $\tilde{\varphi}: K[X] \rightarrow L', f \mapsto f(a')$.

Dann ist $\tilde{\varphi}(m_{a,K}(X)) = m_{a,K}(a') = 0$, also $(m_{a,K}) \subset \text{Kern}(\tilde{\varphi})$.

Wegen der UE der Faktorisierung faktorisieren $\tilde{\varphi}$ durch einen Homo $\bar{\varphi}: K[X]/(m_{a,K}) \rightarrow L'$ mit $\bar{\varphi}|_K = \text{id}$ und $\bar{\varphi}([X]) = a'$. Also

$K(a)$ ist \cong_a , somit entspricht $\bar{\varphi}$ einem $\varphi \in \text{Hom}_K(K(a), L')$

mit $\varphi(a) = a'$. qed.

Prop.: $[L/K] < \infty \implies |\text{Hom}_K(L, L')| \leq [L/K]$.

Beweis: Schreibe $L = K(a_1, \dots, a_n)$ und treibe Induktion über n .

Für $n=0$ ist $L=K$ und beide Seiten = 1.

Für $n \geq 1$ ist $|\text{Hom}_K(K(a_1), L')| \leq \deg(m_{a_1,K}) = [K(a_1)/K]$

nach obiger Prop. Für jedes feste $\varphi_1 \in \text{Hom}_K(K(a_1), L')$ fassen wir L' als Körpererweiterung von $K(a_1)$ auf wie φ_1 .

Nach IV gilt dann

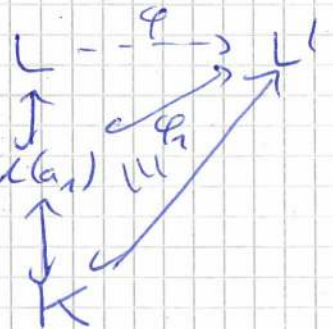
$|\{\varphi \in \text{Hom}_K(L, L') \mid \varphi|_{K(a_1)} = \varphi_1\}| \leq [L/K(a_1)]$.

Durch Variieren von φ_1 finden wir

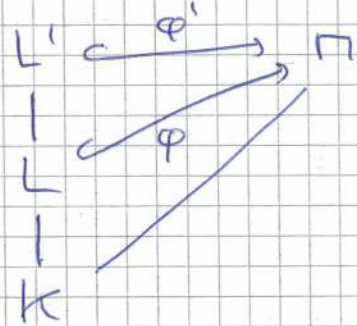
$$|\text{Hom}_K(L, L')| = \sum_{\varphi_1 \text{ wählen}} |\{\varphi\}|$$

$$\leq [L/K(a_1)] \cdot [K(a_1)/K] = [L/K].$$

qed.



Prop. 2: Seien $L'/L/K$ algebraische Körpererweiterungen und sei Π/K eine Körpererweiterung mit Π algebraisch abgeschlossen. Dann existiert jeder $\varphi \in \text{Hom}_K(L, \Pi)$ eine Fortsetzung $\varphi' \in \text{Hom}_K(L', \Pi)$:



Beweis: Spezialfall $L' = L(a)$.

Dann fassen wir Π via φ als Körpererweiterung von L auf und müssen somit ein Element

$\varphi' \in \text{Hom}_L(L(a), \Pi)$ finden.

Da das Minimalpolynom von a über L eine Nullstelle in Π hat, ist die Existenz von φ' durch Prop. 1 garantiert.

Allgemeiner Fall: Sei \mathcal{J} die Menge aller Paare (L_i, φ_i) für Zwischenkörper $L \subset L_i \subset L'$ und Fortsetzungen φ_i von φ zu $\varphi_i \in \text{Hom}_K(L_i, \Pi)$. Definieren wir auf \mathcal{J} eine Partialordnung durch $(L_1, \varphi_1) \leq (L_2, \varphi_2) \iff L_1 \subset L_2 \wedge \varphi_2|_{L_1} = \varphi_1$.

Diese ist induktiv geordnet: Für jede Kette \mathcal{K} , $\mathcal{K} = \{(L_i, \varphi_i) \mid i \in I\} \subset \mathcal{J}$ ist (L'', φ'') mit $L'' := \bigcup_{i \in I} L_i$ und $\varphi''(x) := \varphi_i(x)$ falls $x \in L_i$ eine obere Schranke von \mathcal{K} in \mathcal{J} .

Nach dem Lemma von Zorn existiert also \mathcal{J} ein maximales Element (L'', φ'') .

Für jedes $a \in L'$ existiert dann nach dem bereits behandelten Spezialfall (mit L'' anstelle L) eine Fortsetzung φ^+ von φ'' auf $L^+ := L''(a) \subset L'$. Also gilt

$$(L'', \varphi'') \leq (L^+, \varphi^+) \in \mathcal{J}.$$

Die Maximalität von (L'', φ'') impliziert daher $L'' = L^+$, also $a \in L''$.

Da dies bei jedem $a \in L'$ gilt, folgt

davon, dass $L'' = L'$, und $\varphi'' = \varphi'$ ist die gesuchte Fortsetzung. qed

