Ad §5.7: Homomorphismen zwischen Körpererweiterungen

Prop.: $\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_K(L,L')\ \forall a \in L$:

a algebraisch über K $\iff$ $\varphi(a)$ algebraisch über K

Und dann haben beide dasselbe Minimalpolynom über K.

Beweis: $\forall f \in K[X]$: $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$. Auch ist φ injektiv.

Also gilt $f(a)=0 \iff f(\varphi(a))=0$. ... qed.

Prop.: $\forall a \in L$ alg./K: $\mathrm{Hom}_K(K(a),L') \xrightarrow{1:1} \{a' \in L' \mid m_{a,K}(a')=0\}$

$$\varphi \longmapsto \varphi(a)$$

Beweis: Wohldefiniert wegen voriger Proposition.

Injektiv, da jeder Homo durch seine Werte auf $K \cup \{a\}$ bestimmt ist.

Surjektiv: Sei $a' \in RHS$ und konstruiere $\tilde\varphi : K[X] \to L'$, $f \mapsto f(a')$.

Dann ist $\tilde\varphi(m_{a,K}(X)) = m_{a,K}(a') = 0$, also $(m_{a,K}) \subset \mathrm{Ker}(\tilde\varphi)$.

Wegen der UE der Faktorisierung faktorisiert $\tilde\varphi$ durch einen Homo $\bar\varphi$: $K[X]/(m_{a,K}) \to L'$ mit $\bar\varphi|_K = id$ und $\bar\varphi([X]) = a'$. Aber $\underset{\cong}{K[X]/(m_{a,K})}$ ist $K(a)$, $[X] \mapsto a$, somit entspricht $\bar\varphi$ einem $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K(a),L')$ mit $\varphi(a)=a'$. qed.

Prop.: $[L/K] < \infty \implies |\mathrm{Hom}_K(L,L')| \leq [L/K]$.

Beweis: Schreibe $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ und tue Induktion über n.

Für $n=0$ ist $L=K$ und beide Seiten $=1$.

Für $n \geq 1$ ist $|\mathrm{Hom}_K(K(a_1),L')| \leq \deg(m_{a_1,K}) \overset{!}{=} [K(a_1)/K]$ nach obiger Prop. Für jedes feste $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}_K(K(a_1),L')$ fassen wir L' als Körpererweiterung von $K(a_1)$ auf via φ_1.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, dashed, "\varphi"] & L' \\ K(a_1) \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi_1"'] & \\ K \arrow[u] \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

Nach IV gilt dann

$|\{\varphi \in \mathrm{Hom}(L,L') \mid \varphi|K(a_1) = \varphi_1\}| \leq [L/K(a_1)]$.

Durch Variieren von φ_1 finden wir

$$|\mathrm{Hom}_K(L,L')| = \sum_{\varphi_1 \text{ wählen}} |\{\text{dies}\}|$$

$$\leq [L/K(a_1)] \cdot [K(a_1)/K] = [L/K].$$ qed.

Prop. 2: Seien $L'/L/K$ algebraische Körpererweiterungen und sei Ω/K eine Körpererweiterung mit Ω algebraisch abgeschlossen. Dann besitzt jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(L,\Omega)$ eine Fortsetzung $\varphi' \in \mathrm{Hom}_K(L',\Omega)$:

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, hook, "\varphi'"] \arrow[d, dash] & \Omega \\
L \arrow[ur, hook, "\varphi"'] \arrow[d, dash] & \\
K \arrow[uur, dash] &
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u> <u>Spezialfall $L' = L(a)$.</u>
Dann fassen wir Ω via φ als Körpererweiterung von L auf und müssen somit ein Element $\varphi' \in \mathrm{Hom}_L(L(a),\Omega)$ finden.
Da das Minimalpolynom von a über L eine Nullstelle in Ω hat, ist die Existenz von φ' durch Prop. 1 garantiert.

<u>Allgemeiner Fall:</u> Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Paare (L_1,φ_1) für Zwischenkörper $L \subset L_1 \subset L'$ und Fortsetzungen von φ zu $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}_K(L_1,\Omega)$. Definiere auf $\mathcal{S}$ eine Partialordnung durch $(L_1,\varphi_1) \le (L_2,\varphi_2) :\Longleftrightarrow L_1 \subset L_2 \wedge \varphi_2|_{L_1} = \varphi_1$.
Diese ist <u>induktiv geordnet</u>: Für jede Kette ~~[illegible]~~ $\mathcal{K} = \{(L_i,\varphi_i) \mid i \in I\} \subset \mathcal{S}$ ist (L'',φ'') mit $L'' := \bigcup_{i\in I} L_i$ und $\varphi''(x) := \varphi_i(x)$ falls $x \in L_i$ eine obere Schranke von $\mathcal{K}$ in $\mathcal{S}$.
Nach dem Lemma von Zorn besitzt also $\mathcal{S}$ ein <u>maximales Element</u> (L'',φ'').

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[d, dash] & & \Omega \\
L^+ = L''(a) \arrow[urr, "\varphi^+"] \arrow[d, dash] & & \\
L'' \arrow[uurr, "\varphi''"'] \arrow[d, dash] & & \\
L \arrow[d, dash] & & \\
K \arrow[uuuurr, dash] & &
\end{tikzcd}$$

Für jedes $a \in L'$ existiert dann nach dem bereits behandelten Spezialfall (mit L'' anstelle L) eine Fortsetzung φ^+ von φ'' auf $L^+ := L''(a) \subset L'$. Also gilt $(L'',\varphi'') \le (L^+,\varphi^+) \in \mathcal{S}$.
Die Maximalität von (L'',φ'') impliziert daher $L'' = L^+$, also $a \in L''$.
Da dies bei jedem $a \in L'$ gilt, folgt daraus $L'' = L'$, und $\varphi'' =: \varphi'$ ist die gesuchte Fortsetzung. qed